Le problème est constitué de 3 parties indépendantes.

# PARTIE I

La fonction $t \mapsto sh(t)$ désigne le sinus Hyperbolique.

Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} g(t) = \dfrac{t}{sh(t)} & \text{si } t \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

**I.1.** **a)** Démontrer que g est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ On pourra à cet effet utiliser le developpement en série entière de sh(t).

**b)** Préciser $g^{(k)}(0)$ pour $0 \leq k \leq 4$.

**c)** Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ (sens de variation, limites).

**I.2.** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on définit le polynôme $Q_n(X) = (1 + X)^{2n} - (1 - X)^{2n}$.
Préciser le degré de Qn, ses termes de plus haut degré et de plus bas degré.

**I.3.** **a)** Factoriser $Q_n$ dans $\mathbb{C}[X]$ en produit de facteurs irréductibles.

**b)** En déduire sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de facteurs irréductibles.

**c)** En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Dans toute la suite de cette partie, t est un réel strictement positif fixé.

**I.4.** **a)** Exprimer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{t^2}{4n^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\right)$ à l'aide de $Q_n$.

**b)** En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{1 + \dfrac{t^2}{4n^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}}\right)$ en fonction de g(t).

**1.5.** **a)** Démontrer que la série de terme général $\operatorname{Ln}\left(1+\frac{t^2}{k^2\pi^2}\right)$ est convergente.

**b)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Ln}\left(1+\frac{t^2}{4n^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\right)$.

**c)** Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq N+2$. Démontrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+\frac{t^2}{k^2\pi^2}}{1+\frac{t^2}{4n^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}}\right)\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{N}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+\frac{t^2}{k^2\pi^2}}{1+\frac{t^2}{4n^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}}\right)\right| + 2\sum_{k=N+1}^{+\infty}\operatorname{Ln}\left(1+\frac{t^2}{k^2\pi^2}\right).$$

**I.6.** En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n-1}(t)$ , avec $a_{n-1}(t)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{k^2\pi^2}}\right)$.

# PARTIE II

**II.1.** On considère ici une application u définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^-$, continue et strictement décroissante. f est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

**a)** Démontrer que $\forall \alpha \in ]0,1]$ , $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u^n(\alpha)}{\int_0^1 u^n(t)dt} = 0$.

**b)** On suppose dans cette question que $f(0)=0$.
Vérifier l'inégalité, pour tout $\alpha \in ]0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\left|\frac{\int_0^1 f(t)\ u^n(t)dt}{\int_0^1 u^n(t)dt}\right| \leq \max_{x\in[0,\alpha]}|f(x)| + \max_{x\in[0,1]}|f(x)|\ \frac{u^n(\alpha)}{\int_0^1 u^n(t)dt}$$

En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\int_0^1 f(t)\, u^n(t)\,dt}{\int_0^1 u^n(t)\,dt}$.

**c)** Dans le cas général, calculer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\int_0^1 f(t)\, u^n(t)\,dt}{\int_0^1 u^n(t)\,dt}$.

Dans la suite pour tout $x \in ]-1,1[$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k(x) = \int_0^{\pi/2} \cos^{2k}(t)\cos(2xt)\,dt$.

**II.2.** Calculer $I_0(x)$, $\dfrac{I_0(x)}{I_0(0)}$.

**II.3.** Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'on peut trouver un entier $\lambda_k$ ne dépendant que de k tel que

$$I_{k+1}(x) = \frac{\lambda_k}{(2k+2)^2 - 4x^2} I_k(x) .$$

$\lambda_k$ est le produit de deux entiers consécutifs que l'on précisera.

**II.4.** En déduire l'expression de $\prod_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{x^2}{k^2}\right)}$ en fonction exclusivement de $I_n(x)$, $I_0(x)$, $I_n(0)$, $I_0(0)$.

**II.5.** A l'aide des résultats du **II.1.**, calculer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{I_n(x)}{I_n(0)}$.

**II.6.** En déduire la convergence de la suite $b_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left( \dfrac{1}{1 - \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}} \right)$ pour $x \in ]-\pi, \pi[$ et exprimer sa limite L(x) à l'aide de fonctions usuelles.

# PARTIE III

n est un entier naturel non nul. L'espace $\mathbb{C}^n$ est muni de la norme $\| \ \|$ définie par :

$$\forall\, x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{C}^n \ , \ \|x\| = \sup\{|x_i|, 1\le i\le n\} \ .$$

Soit $\varphi$ un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. On dira que $\varphi$ est borné lorsque pour tout vecteur x de $\mathbb{C}^n$, la suite $\left(\|\varphi^p(x)\|\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, avec $\varphi^p=\varphi o\varphi o..o\varphi$ (p fois).

Id désigne l'application identique de $\mathbb{C}^n$.

**III.1.** **a)** Montrer que si $\varphi$ est borné, toutes ses valeurs propres sont de module inférieur ou égal à 1.

**b)** Démontrer, à l'aide d'un endomorphisme simple de $\mathbb{C}^2$, que la réciproque de **a)** est fausse (on pourra raisonner avec les matrices).

**c)** On suppose $\varphi$ diagonalisable. Montrer que la réciproque de **a)** est vraie.

**III.2.** Soit $\varphi$ un endomorphisme borné de $\mathbb{C}^n$ et $\lambda$ une valeur propre de $\varphi$, de module 1.
On considère un vecteur $x\in \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda\mathrm{Id})^2$.
On pose $y=\varphi(x)-\lambda x$.

**a)** Exprimer $\varphi^p(x)$ sous forme d'une combinaison linéaire de x et y dont les coefficients seront donnés en fonction de p et $\lambda$.

**b)** En déduire que le vecteur x est un élément de $\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda\mathrm{Id})$.

**c)** Démontrer que $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(\varphi-\lambda\mathrm{Id})$.

**III.3.** Soient p, q, r trois réels strictement positifs de somme 1.
On note $M=\begin{pmatrix} p & q & r \\ q & p & r \\ q & r & p \end{pmatrix}$ et $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ de matrice M.
Démontrer que $\mathbb{C}^3 = \mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(\varphi-\mathrm{Id})$.